Méthode d'Euler appliquée à la chute d'un corps avec frottements

1. Expérience : chute d'un ensemble de ballons dans l'air.

Un élève lâche un ensemble de 4 ballons lestés :

Volume total $V = 2 \times 2 + 2 \times 0{,}6 = 5{,}2$ L et la masse total $m = 22{,}2$ g

- On filme la chute des ballons à l'aide d'une webcam.

Réglages camera Philips ToUcam Pro :

- video format : 320 x 240
- video source : réglage entièrement automatique
- temps : 5 secondes
- vitesse d'obturation 1/250ème de seconde
- régler le gain afin que l'image soit claire.

Données :

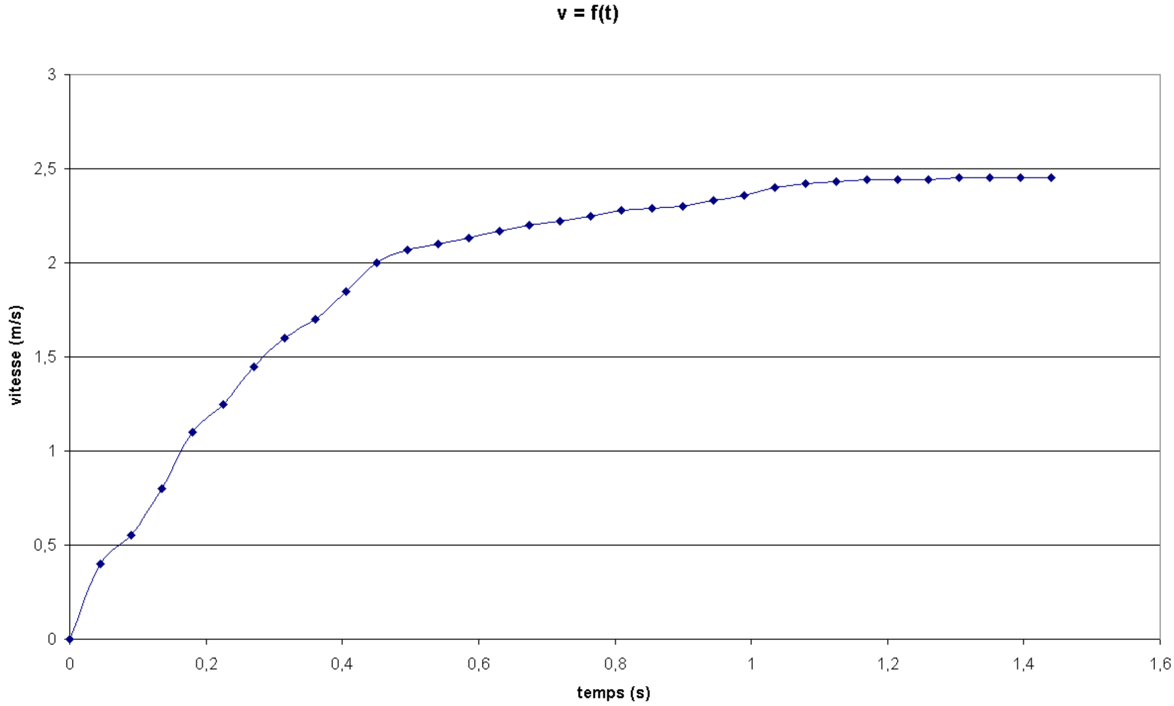
Masse volumique de l'air $\mu = 1{,}3$ kg.m^{-3}
Intensité de la pesanteur $g = 10$ m.s^{-2}

Mise en évidence de l'évolution de la vitesse au cours du temps :

- On pointe la position d'un point du système (par exemple : le centre de l'un des ballons) avec le logiciel Avimeca2.
- On calcule la vitesse des ballons à l'aide du logiciel Regressi.
- On trace le graphe $v = f(t)$ à l'aide du logiciel Excel.

Les modes d'emploi de ces différents logiciels sont donnés dans la partie TP.

On obtient le graphe suivant :



On constate que la vitesse atteint une vitesse limite v_{lim} = 2,45 m.s^{-1}

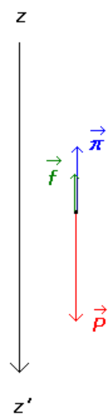
Nous allons établir deux modèles à l'aide d'équations différentielles et discuter de la validité de ces modèles par rapport à la courbe expérimentale trouvée ci-dessus.

2. Equations différentielles du mouvement.

Deux équations différentielles peuvent être établies selon l'expression des forces de frottement
$\vec{f} = -k\,\vec{v}$ (cas d'une vitesse faible du mobile) ou $\vec{f} = -k'\vec{v}^2$ (cas d'une vitesse élevée du mobile)

Etablissement de l'équation différentielle pour l'hypothèse : $\vec{f} = -k\,\vec{v}$

- Système : ensemble des ballons lestés
- Référentiel : terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces extérieures appliquées au système :
    - Poids : $\vec{P} = m\,\vec{g}$
    - Poussée d'Archimède : $\vec{\pi} = -\rho V\,\vec{g}$
    - Force de frottement fluide : $\vec{f} = -k\,\vec{v}$



- Application de le deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

- Par projection sur l'axe *z'z*

$P - \pi - f = ma_G$
$mg - \rho Vg - kv = ma_G$

Soit $a_G = g - \dfrac{\rho Vg}{m} - \dfrac{kv}{m}$

Expression de l'équation différentielle en fonction de v et de $\dfrac{dv}{dt}$:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho Vg}{m} - \frac{kv}{m}$$
$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right) - \frac{kv}{m}$$

Etablissement de l'équation différentielle pour l'hypothèse : $\vec{f} = -k'\vec{v}^2$

Par le même raisonnement on obtient : $a_G = g - \dfrac{\rho Vg}{m} - \dfrac{k'v^2}{m}$

Expression de l'équation différentielle en fonction de v et de $\dfrac{dv}{dt}$:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho Vg}{m} - \frac{k'v^2}{m}$$
$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right) - \frac{k'v^2}{m}$$

3. Résolution de l'équation différentielle par une méthode itérative (la méthode d'Euler).

Itérative : par répétition

Euler : Mathématicien et physicien du 18$^{\text{ème}}$ siècle a qui ont doit des travaux l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière,...), les mathématiques, où il met au premier plan le concept de fonction.

3.1. Résolution pour l'hypothèse $\vec{f} = -k\,\vec{v}$

On a $\dfrac{dv}{dt} = g\left(1 - \dfrac{\rho V}{m}\right) - \dfrac{kv}{m}$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$\dfrac{dv}{dt} = A - Bv$ ou $a = A - Bv$

Les 3 étapes pour résoudre cette équation :

- déterminer A et B
- énoncer le principe de la méthode d'Euler
- appliquer la méthode d'Euler

- Détermination de A et B

$$A = g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right)$$

$$A = 10\left(1 - \frac{1{,}3 \times 5{,}2 \times 10^{-3}}{22{,}2 \times 10^{-3}}\right)$$

$A = 6{,}95$

Pour trouver B, on peut écrire que $B = \dfrac{k}{m}$, mais on ne connaît pas k, alors on utilise une autre méthode :

Quand la vitesse atteint sa valeur limite, on v_{lim} = cste alors $\dfrac{dv}{dt} = 0$

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv_{\text{lim}} = 0$$

soit $B = \dfrac{A}{v_{\text{lim}}}$

Graphiquement, on peut déterminer la valeur de la vitesse limite $v_{\text{lim}} = 2{,}45$ m.s^{-1}

$$B = \frac{6{,}95}{2{,}45}$$

$B = 2{,}84$

- Enoncé du principe de la méthode d'Euler :

L'accélération varie en fonction de la vitesse :

$a_n = A - Bv_n$

la vitesse varie en fonction de l'accélération :

$v_{n+1} = v_n + a_n\Delta t$ Δt est appelé pas du calcul.

- Application de la méthode d'Euler :

Choix du pas de calcul :

Le pas de calcul est choisi tel que $\Delta t = \dfrac{\text{durée pour atteindre la vitesse limite}}{100}$ $\Delta t = \dfrac{2{,}0}{100} = 0{,}02$ s

Tableau de calculs itératifs :

Le remplissage des cases s'effectuent en suivant les flèches

t (s)	$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t$ (m.s^{-1})	$A_n = 6{,}95 - 2{,}84 \times v_n$ (m.s^{-2})
0	0	
0,02		
0,04		
0,06		

t (s)	$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t$ (m.s^{-1})	$a_n = 6{,}95 - 2{,}84 \times v_n$ (m.s^{-2})
0	0,000	6,95 – 2,84 × 0,000 = **6,95**
0,02	0,000 + 6,95 × 0,02 = **0,139**	6,95 – 2,84 × 0,139 = **6,56**
0,04	0,139 + 6,56 × 0,02 = **0,270**	6,95 – 2,84 × 0,270 = **6,18**
0,06	0,270 + 6,18 × 0,02 = **0,394**	6,95 – 2,84 × 0,394 = **5,83**

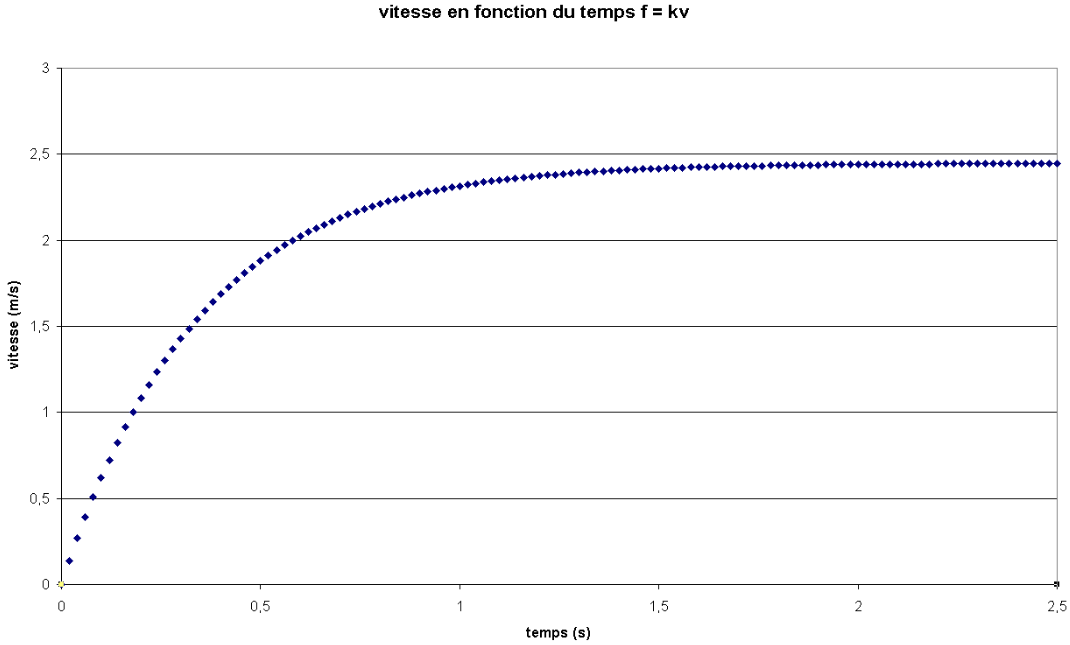
Etc....

Ces calculs sont évidemment beaucoup rapides à réaliser sur un tableur.

Utilisation d'un tableur (le mode d'emploi du tableur est vu en TP)

	A	B	C
1	0	0	6,95
2	0,02	= B1 + C1*0,02	= 6,95 – 2,84*B2
3	0,04	= B2 + C2*0,02	= 6,95 – 2,84*B3
4	0,06	= B3 + C3*0,02	= 6,95 – 2,84*B4

Graphe obtenu :



3.2. Résolution pour l'hypothèse $f = -k'\vec{v}^2$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right) - \frac{k'v^2}{m}$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} = A - Cv^2 \qquad \text{ou} \qquad a = A - Cv^2$$

- Détermination de A et C

$$A = g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right)$$

$$A = 10\left(1 - \frac{1{,}3 \times 5{,}2 \times 10^{-3}}{22{,}2 \times 10^{-3}}\right)$$

$$A = 6{,}95$$

Quand la vitesse atteint sa valeur limite, on $v_{\lim} = \text{cste}$ alors $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\frac{dv}{dt} = A - Cv^2_{\lim} = 0$$

soit $C = \frac{A}{v_{\lim}^2}$

Graphiquement, on peut déterminer la valeur de la vitesse limite $v_{\lim} = 2{,}45$ m.s^{-1}

$$C = \frac{6{,}95}{2{,}45^2} \qquad C = 1{,}16$$

- Enoncé du principe de la méthode d'Euler :

L'accélération varie en fonction de la vitesse :

$a_n = A - Cv^2_n$

la vitesse varie en fonction de l'accélération :

$v_{n+1} = v_n + a_n\Delta t$ Δt est le pas du calcul.

- Application de la méthode d'Euler :

Pas de calcul $\Delta t = \dfrac{2,0}{100} = 0,02$ s

Réponse :

t (s)	$v_{n+1} = v_n + a_n\Delta t$ (m.s^{-1})	$a_n = 6,95 - 1,16 \times v^2_n$ (m.s^{-2})
0	0,000	$6,95 - 1,16 \times 0,000^2 =$ **6,95**
0,02	$0,000 + 6,95 \times 0,02 =$ **0,139**	$6,95 - 1,16 \times 0,139^2 =$ **6,93**
0,04	$0,139 + 6,93 \times 0,02 =$ **0,278**	$6,95 - 1,16 \times 0,278^2 =$ **6,86**
0,06	$0,278 + 6,86 \times 0,02 =$ **0,415**	$6,95 - 1,16 \times 0,415^2 =$ **6,75**

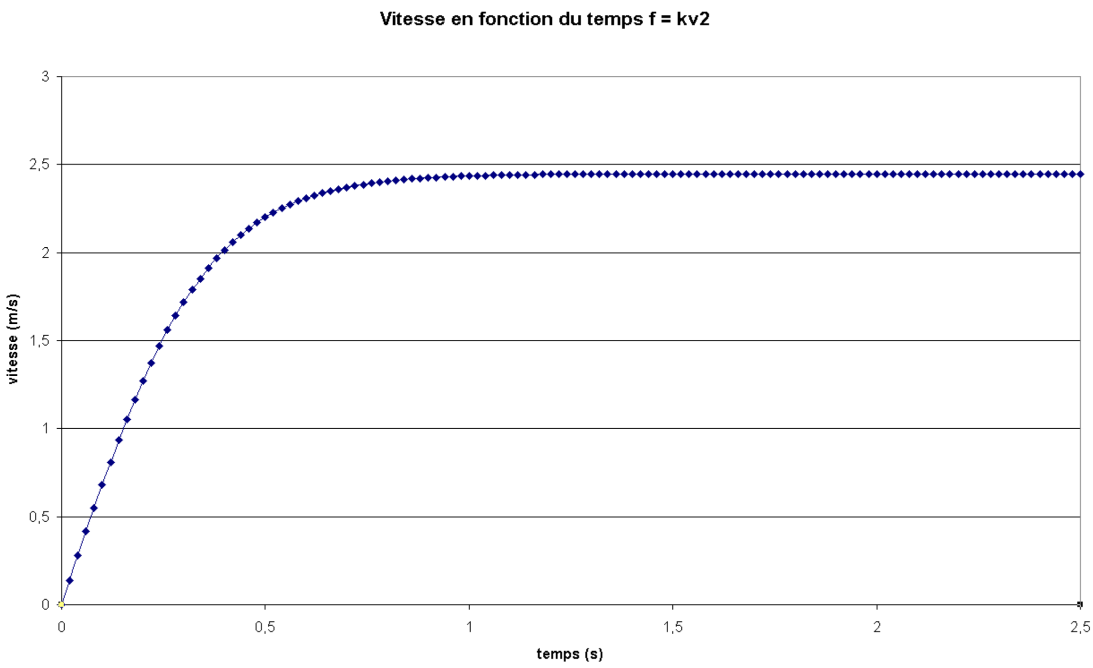
Etc....

Ces calculs sont évidemment beaucoup rapides à réaliser sur un tableur.

Utilisation d'un tableur (le mode d'emploi du tableur est vu en TP)

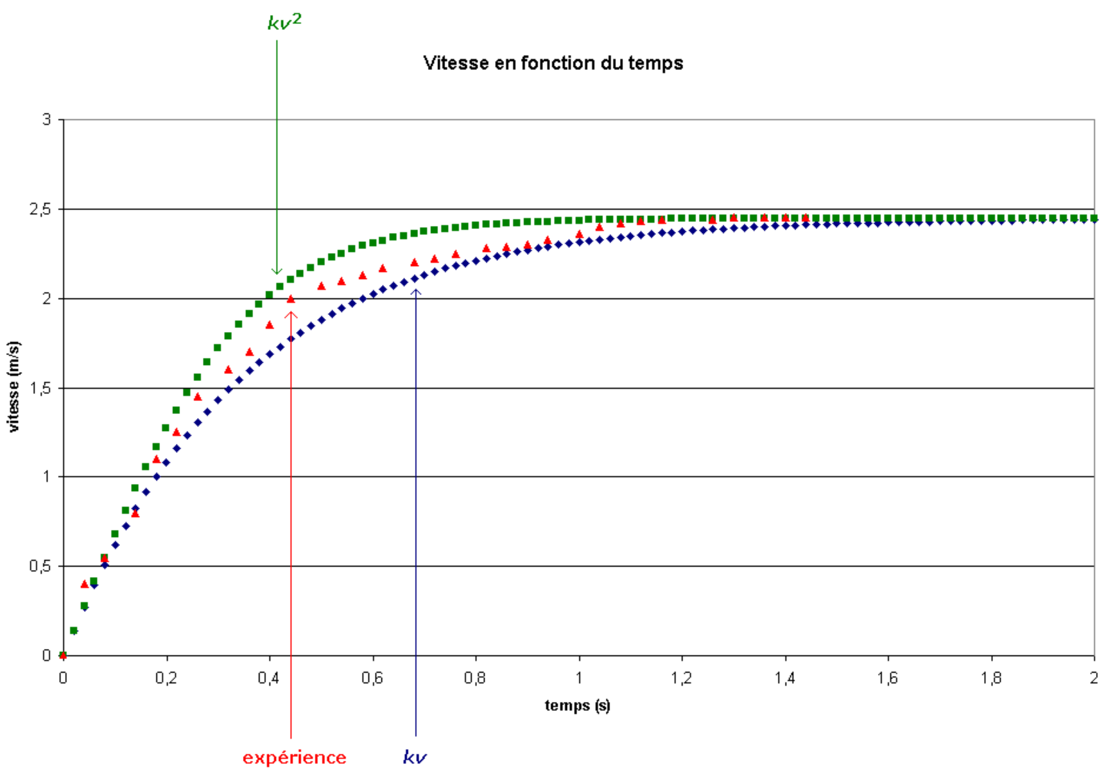
	A	B	C
1	0	0	6,95
2	0,02	= B1 + C1*0,02	= 6,95 – 1,16*B2^2
3	0,04	= B2 + C2*0,02	= 6,95 – 1,16*B3^2
4	0,06	= B3 + C3*0,02	= 6,95 – 1,16*B4^2

Graphe obtenu :



3.3. De quel modèle, l'expérience réalisée en classe se rapproche-telle le plus ?

Voici représenté sur une même feuille les 3 graphes obtenus :



- au début la courbe représentant la chute de l'expérience se rapproche de la courbe « kv »
- au milieu, aucun modèle ne correspond au résultat expérimental
- à la fin la courbe représentant la chute de l'expérience se rapproche de la courbe « kv^2 »
- conclusion : l'expérience réalisée n'est pas vraiment modélisable avec les modèles proposés.